MPA S2 Algèbre 2014. Corrigé succinct du devoir maison d'algèbre.

C. Huyghe

1. 1- On peut prendre $\omega = e^{2i\pi/n}$.

   2- La somme cherchée S est la somme des termes d'une suite géométrique. Donc
   $$S = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0.$$

   3- Les racines 5e de l'unité sont $\{1, e^{2i\pi/5}, e^{4i\pi/5}, e^{6i\pi/5}, e^{8i\pi/5}\}$.

   4- Soient ζ une racine 5-ième de l'unité et $a \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X) = X^5 + 1$. Alors $P(a\zeta) = a^5\zeta^5 + 1 = a^5 + 1 = 0$. Comme $P(-1) = 0$, les racines de P sont $\{-1, -e^{2i\pi/5}, -e^{4i\pi/5}, -e^{6i\pi/5}, -e^{8i\pi/5}\}$.

2. 1- Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose
   $$f(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$
   Il faut montrer que f est injective et surjective. La démonstration de la surjectivité donne la bijection réciproque
   $$f^{-1}(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

   2- On a
   $$\begin{aligned}\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} &= \frac{e^{\frac{-ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}}{e^{\frac{-ik\pi}{n}} - e^{\frac{ik\pi}{n}}} \\ &= icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

   3- Une solution de l'équation (E) : $(z-1)^n = (z+1)^n$ est nécessairement différente de -1 et vérifie
   $$f(z)^n = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n = 1.$$
   Autrement dit z est solution de (E) si et seulement si $z = f^{-1}(\omega)$ où ω est une racine n-ième de 1. Comme $f^{-1}(e^{2ik\pi/n}) = icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, on a $n-1$ racines de Q. Mais Q est de degré $\leq n-1$. Et le terme de degré $n-1$ de Q est $-2n$ (on le calcule avec la formule du binôme). Ce qui donne la factorisation suivante
   $$Q(z) = -2n \prod_{k=1}^{n} (z - icotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)).$$

3. Répondre par V (Vrai) ou F (Faux) aux questions suivantes. Donner une démonstration si la proposition est vraie et un contre-exemple sinon.

   1- Soit E l'espace vectoriel réel des suites à valeurs réelles. Soit M l'ensemble des suites croissantes de E. Est-ce que M est un sous-espace vectoriel de E ? Faux. Si $u_n = n$, alors (u_n) est croissante, mais $(-u_n)$ non.

   2- Est-ce que la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$? Faux. Il suffit de prendre dans $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ les deux axes d'équation $D_1 : x = 0$ et $D_2 : y = 0$. La somme des points $(1, 0) + (0, 1)$ n'est pas dans la réunion de ces deux axes.

   3- Soit $t \in \mathbb{R}$, est-ce que les 3 vecteurs suivants forment une base de $\mathbb{C}^3$:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 \\ t^2+1 \\ 0 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1-i \\ t^2+1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

   Faux car $W = V - iU$, ce qui montre que la famille est liée et n'est donc pas une base de $\mathbb{C}^3$.

4. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})$. On Pose

$$E = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \,|\, a_{1,1} + a_{2,2} = 0\}.$$

   1- Facile.

   2- Facile.

   3- Soient λ_1, $\lambda 2$, $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0$. Comme

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_3, \end{bmatrix},$$

   on voit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, et donc la famille (T_1, T_2, T_3) est libre.

   4- Soit $A \in E$, alors $\exists\, a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

   Donc $A = bT_1 + cT_2 + aT_3 \in Vect(T_1, T_2, T_3)$. Ainsi la famille (T_1, T_2, T_3) est génératrice de E et forme donc une base de E.